

Turbo 码概率代数联合解码算法

李建平, 梁庆林

(北京大学电子工程研究所, 北京 100871)

摘要: Turbo 码采用修正的 Bahl et al. 算法实现解码. 这是一种基于软值的概率迭代解码算法. 本文在保持 Turbo 码迭代软解码算法优点的基础上, 充分利用 Turbo 码编码器结构这一确知条件, 结合代数解码原理, 提出了一种 Turbo 码概率代数联合解码算法. 该算法结合了概率解码和代数解码的优点, 又有效避免了误差传播的发生, 使 Turbo 码的纠错性能在原经典算法的基础上得到进一步的提高. 该算法不仅为降低 Turbo 码的比特误码率和误差地板值提供了一种新的研究途径, 而且因其更好的纠错性能而具有十分明显的实用价值. 仿真实验结果显示, 在比特误码率 (BER) 为 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 时, 与经典 Turbo 码解码算法相比, 采用该算法能获得 0.1 dB 左右的编码增益.

关键词: Turbo 码; 成员编码器; 概率代数联合解码; 比特错误率

中图分类号: TN91 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2003) 12-1842-04

Joint Probability Algebra Decoding for Turbo Codes

LI Jianping, LIANG Qinglin

(Institute of Electronics Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Turbo codes conventionally adopt modified Bahl et al. algorithm, a kind of probabilistic iterative decoding algorithm based on soft values. To fully make use of the information on the deterministic structure of turbo constituent encoders according to the algebraic decoding principle in conjunction with the probabilistic decoding algorithm, this paper proposed a joint probability algebra decoding scheme for turbo codes. Combining the advantages of iterative soft decoding and algebraic decoding and efficiently avoiding the bit error propagation, the proposed scheme is capable of further improving the error correcting performance of turbo codes. It is not only a new research method to lower the Bit Error Rate (BER) and the error floor of turbo codes but valuable for applications as a result of better error correcting performance. Simulation results show that the turbo codes can obtain about 0.1 dB asymptotic coding gain with the proposed scheme than those with the typical turbo code decoding schemes when the BER is between $10^{-3} \sim 10^{-4}$.

Key words: turbo codes, constituent encoders; joint probability algebra decoding; bit error rate

1 引言

Turbo 码因具有接近 Shannon 极限的低误码率而引起编码界的普遍重视^[1,2], 其研究已经从理论转到了实际应用. 在无线陆基通信领域, 第三代移动通信 (3G) 标准就采用 Turbo 码用于数据服务. 如在 CDMA2000 (IMT 2000: 1xMC, 3xMC) 标准中, 就采用了码率为 1/5 的 Turbo 码方案. 而在 WCDMA (IMT 2000: DS) 标准中, 采用的却是上述 Turbo 码方案的增信删余形式, 码率为 1/3^[3]. 在对 Turbo 码的研究中, 结合其他技术或理论, 进一步提高 Turbo 码的纠错性能, 是其重要研究方向之一^[4-7].

Turbo 码又称为并行级联卷积码 (PCCC), 它是多个系统卷积码的并行级联^[8,9]. 卷积码的解码算法大体上分为二类: 概率解码和代数解码. 概率解码利用的是系统的统计信息, 而代数解码则利用系统的结构信息. 由于它们所依赖的信息以

及解码的方式不同, 在选择解码方案时总是被独立采用. Turbo 码解码算法采用软入软出 (SISO) 的迭代算法, 可实行多次迭代^[10,11]. 与其它采用多级解码算法的解码器不同, Turbo 码解码器中各成员解码器之间存在着信息的相互交换. 这极大的提高了 Turbo 码的纠错性能^[12,13]. 但从本质上说, Turbo 码采用的仍然是一种概率解码算法, 只考虑了统计信息而没有充分考虑 Turbo 码的结构信息^[12,14]. 由于代数解码对于低误码率的码组具有很好的纠错性能, 而 Turbo 码的解码输出具有极低的误码率, 因此, 如果将概率解码和代数解码结合起来, 在执行完 Turbo 码概率解码迭代算法的基础上, 充分利用 Turbo 码编码器结构这一确知信息进行代数解码, 则必然能进一步提高 Turbo 码纠错能力.

编码器原理及结构

Turbo 码概率代数联合解码是在 Turbo 码迭代解码的基础上, 利用 Turbo 码的编码器结构信息实现进一步解码. 代数

结构解码对于低比特错误率 (BER) 的情况有良好的纠正效果, 因此, 如果根据 Turbo 码编码器的代数特征, 给出输入信息位与输出冗余位的线性关系式, 据此对输入信息序列中存在的差错进行进一步校正, 必能再次减少估计序列中的比特错误率 (BER). 要利用输入信息及冗余位的线性关系进行纠错计算, 首先要求得到输入信息位和冗余位的估计值, 可根据典型的 Turbo 码算法求取这二个估计序列.

Turbo 码概率 2 代数解码算法编码器如图 1 所示. x_k 为输入系统信息, y_{1k} , y_{2k} 和 z_k 为冗余检验位. 在图 1 中, 成员编码器 E1 和 E2 以及交织器 INT1 组成了一个输入信息为 d_k 输出系统信息为 x_k , 输出冗余信息为 y_{1k} 和 y_{2k} 的典型的 Turbo 码编码器, 其码率为 $R_1 = 1/3$. 同样地, 成员编码器 E3 及 E4、交织器 INT2 和选择器 MUX 组成了一个输入信息为 y_{2k} , 输出冗余信息为 z_k , 码率 $R_2 = 1/2$ 的、典型的 Turbo 码编码器. 选择器 MUX 在此起增信删余的作用.

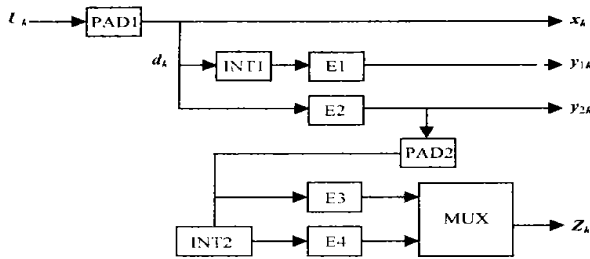


图 1 Turbo 码概率 2 代数解码算法编码器

设序列 $\{d_k\}$ 的每帧长度为 n , 则 $\{x_k\}$ 、 $\{y_{1k}\}$ 和 $\{y_{2k}\}$ 均是每帧长度为 n 的序列. 将 y_{2k} 视为由成员编码器 E3、E4 和交织器 INT2 所组成的 Turbo 码编码器的输入信息, 为了实现可靠的终止 (回到 00 状态), 需在序列 $\{y_{2k}\}$ 的每帧后加 m 个尾比特 (m 为成员编码器 E3 和 E4 的最大存贮长度)^[15, 16]. 因此, 事实上输入成员编码器 E3 和 E4 的系统信息序列的每帧长度为 $n+m$. 经增信删余后, 输出冗余序列 $\{z_k\}$ 的每帧长度为 $n+m$. 设整个系统的输入信息序列 $\{u_k\}$ 的每帧长度为 k , 序列 $\{d_k\}$ 是在 $\{u_k\}$ 的每帧序列后添加了 $m_1 = n - k$ 个尾比特的结果 (m_1 为成员编码器 E1 和 E2 的最大存贮长度). 其目的是使成员编码器 E1、E2 和交织器 INT1 所组成的 Turbo 码能可靠的终止 (回到 00 状态). 这样, 图 1 中采用概率 2 代数解码算法编码器的码率为:

$$R = \frac{k}{3n + (n+m)} = \frac{n - m_1}{4n + m} \quad (1)$$

通常有: $m \ll n$ 和 $m_1 \ll n$. 因此, 可忽略这种由于增加尾比特而产生的对码率的影响. 式 (1) 中的码率可近似记为:

$$R = 1/4 \quad (2)$$

在接收端, 以 $\langle \# \rangle$ 表示信号的有扰形式, 如 $\langle (x_k) = x_k + n$. n 为加性高斯白噪声 (AWGN). 将接收到的四路有扰信号分成二组分别进行 Turbo 码概率迭代解码, 由 $\langle (x_k)$ 、 $\langle (y_{1k})$ 和 $\langle (y_{2k})$ 按码率 $1/3$ 的、典型的 Turbo 码进行解码, 求得系统信息 x_k 的估计值 $\langle (x_k)$; 由 $\langle (y_{2k})$ 和 $\langle (z_k)$ 按码率 $1/2$ 的、增信删余的 Turbo 码进行解码, 求得成员编码器 E2 的冗余位 y_{2k} 的估计值 $\langle (y_{2k})$. 成员编码器 E2 是一个系统卷积码编

器, 其系统位与冗余校验位之间存在线性关系, 据此可实现对系统信息估计值 $\langle (x_k)$ 的进一步纠错解码.

2 代数解码原理

Turbo 码编码器通常为递归系统卷积码 (RSC) 编码器^[1, 17], 下面取成员编码器 E2 的生成子 $G_1 = (7)_8$, $G_2 = (5)_8$ 为例来说明代数解码的工作原理. 记 $\langle (x_k)$ 为系统信息 x_k 的估计值, $\langle (y_{2k})$ 为成员编码器 E2 产生的冗余位 y_{2k} 的估计值. $\langle (x_k)$ 和 $\langle (y_{2k})$ 均是经过 Turbo 码迭代解码后求得, 其比特错误率 (BER) 极低. 进一步的代数解码如图 2 所示, T 代表存贮单元. 图 2 中虚线框内部分是成员编码器 E2 的冗余位产生单元, 当成员编码器 E2 的输入是 x_k 时, 该单元输出是 y_{2k} . 在其输入是系统信息 x_k 的估计值 $\langle (x_k)$ 时, 记此时的冗余位产生单元输出是 $S(y_{2k})$. 判决值 $d(x_k, y_{2k})$ 是 $S(y_{2k})$ 和冗余位估计值 $\langle (y_{2k})$ 的模 2 和, 有如下表示式:

$$d(x_k, y_{2k}) = S(y_{2k}) + \langle (y_{2k}) \pmod 2 \quad (3)$$

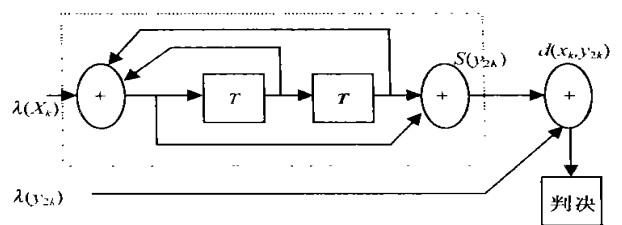


图 2 代数解码原理图

假设 K 时刻前判决值序列 $\{d(x_k, y_{2k})\}$ 中的各比特位均为 00, 根据式 (3) 可知, K 时刻前序列 $\{S(y_{2k})\}$ 和序列 $\{K(y_{2k})\}$ 中各对应比特位具有相同的取值. 由于 Turbo 码迭代解码有极低的比特错误率 (BER), 而 $S(y_{2k})$ 是根据由系统信息 x_k 产生冗余信息位 y_{2k} 的同样的方式, 由系统信息 x_k 解码后的估计值 $\langle (x_k)$ 作为输入所产生, 因此, 可初步认为 K 时刻前序列估计值 $\langle (x_k)$ 和 $\langle (y_{2k})$ 中各比特位均无解码错误. 若 K 时刻判决值 $d(x_k, y_{2k})$ 取值为 10, 则认为 $\langle (x_k)$ 与 $\langle (y_{2k})$ 中有一位存在着解码错误. 由于成员编码器 E2 是递归系统卷积码 (RSC) 编码器, 其转移函数相当于无限冲激响应 (IIR), K 时刻的输入对 K 时刻及其以后各时刻的输出均有影响. 若 $\langle (x_k)$ 是错误比特, 则会引起 K 时刻后序列 $\{S(y_{2k})\}$ 中产生大量的错误比特, 根据式 (3), 其结果是在 K 时刻后, 序列 $\{d(x_k, y_{2k})\}$ 中出现许多个 $d(x_k, y_{2k})$ 取值为 10 的比特位. 若 $\langle (y_{2k})$ 是错误比特, 由于序列 $\{K(y_{2k})\}$ 是有扰冗余位序列 $\{K(y_{2k})\}$ 作为系统信息序列经过 Turbo 码迭代解码后的结果, 其各个比特位之间相互不相关, 因此, 它对 $K+1$ 及其以后各时刻的判决值 $d(x_k, y_{2k})$ 不产生影响. 根据 K 时刻出现错码时 $\langle (x_k)$ 或 $\langle (y_{2k})$ 出错对序列 $\{d(x_k, y_{2k})\}$ 中后续比特位的影响, 可以给出进一步寻找并纠正错误比特的方法如下:

(1) 设序列 $\{K(x_k)\}$ 和 $\{K(y_{2k})\}$ 的每帧长度为 L , 计算 $S = \sum_{k=1}^L d(x_k, y_k)$.

(2) $S \neq 1$, 则认为该估计序列 $\{K(x_k)\}$ 没有比特错误, 不进行进一步解码计算, 此时有二种情况: $S = 0$, 认为序列 $\{K(x_k)\}$

$\{x_k\}$ 和 $\{K(y_{2k})\}$ 均无解码错误; $S=1$, 则在序列 $\{K(y_{2k})\}$ 中或在序列 $\{K(x_k)\}$ 的尾部存在着一个错误比特. 由于解码的最终结果是序列 $\{K(x_k)\}$ 中的有用输入信息比特, 对冗余值估计序列 $\{K(y_{2k})\}$ 和序列 $\{K(x_k)\}$ 中添加的 m 个尾比特并不关心, 因此可认为此时的解码无差错. 若是在序列 $\{K(x_k)\}$ 的有用输入信息位上存在着错误比特, 则该错误将会通过递归系统卷积码(RSC)编码器的无限冲激响应(IIR)的转移函数向下传播, 也就是说 $S>1$.

(3) $S>1$, 记最先使 $d(x_k, y_{2k})=1$ 的二个位置的下标依次是 K_1, K_2 . 取一判别间隔 N , 通常有 $N \setminus m$ (m 是递归系统卷积码(RSC)成员编码器的存储长度). 若 $K_2 - K_1 > N$, 认为在 K_1 时刻 $K(y_{2k})$ 出错, 在 K_1 时刻令:

$$K(y_{2k})c = K(y_{2k}) + 1 \pmod{2} \quad (4)$$

实现 K_1 时刻 $K(y_{2k})$ 的纠错计算. 若 $K_2 - K_1 \leq N$, 则认为在 K_1 时刻 $K(x_k)$ 出错, 此时令:

$$K(x_k)c = K(x_k) + 1 \pmod{2} \quad (5)$$

实现 K_1 时刻 $K(x_k)$ 的纠错计算.

(4) 在 K_1 时刻以 $K(y_{2k})c$ 取代 $K(y_{2k})$ (对应于 $K_2 - K_1 > N$) 或以 $K(x_k)c$ 取代 $K(x_k)$ (对应于 $K_2 - K_1 \leq N$), 计算 $S_1 = \sum_{k=1}^L d(x_k, y_k)$.

(5) $S_1 \leq 1$, 结束解码计算.

(6) $S_1 \setminus S$, 码序列错误样本出现复杂情况, 保留 K_1 时刻的原 $K(x_k)$ 值, 结束解码计算. 避免代数解码时可能引起的错误传播.

(7) $S > S_1 > 1$, 令 $S = S_1$, $K(y_{2k}) = K(y_{2k})c$ (对应于 $K_2 - K_1 > N$) 或 $K(x_k) = K(x_k)c$ (对应于 $K_2 - K_1 \leq N$), 返回第三步.

上述代数解码建立在这样一个假设的基础上, 即 Turbo 码迭代解码后输出估计值序列有很低的误码率. 在序列 $\{K(x_k)\}$ 中连续几位出错或同一时刻 $K(x_k)$ 与 $K(y_{2k})$ 同时出错被认为是复杂情况, 由于 Turbo 码迭代解码后输出估计值序列误码率极低, 错误比特主要呈现为零散存在, 为了减少解码复杂性, 对于这种错误样本出现的复杂情况, 在代数解码时不再对其进行进一步的判别和纠错.

3 仿真实验及结果

仿真实验采用最大对数最大后验概率(MAX2log2MAP)算法. 与 Turbo 码经典的对数最大后验概率(log2MAP)算法相比较, 最大对数最大后验概率(MAX2log2MAP)算法尽管在 Turbo 码纠错性能上略有损失, 但由于其算法计算量小, 硬件实现的复杂性以及对存储容量的要求也较低, 便于仿真实验与具体实现. 在本文所进行的仿真实验中, Turbo 码编码器中采用的均为 8 态递归系统卷积码(RSC)成员编码器, 其生成子 $G_1 = (7)_8, G_2 = (5)_8$, 编码存储长度 $m = 2$, 编码约束度 $M = m + 1 = 3$. 取判别间隔 $N = M = 3$, 迭代次数 $n = 3$ 的 Turbo 码经典算法和 Turbo 码概率代数联合解码算法的比较结果如图 3 所示. 由实验比较结果曲线可以看出, 不管交织器长度是大 ($L = 500$) 还是小 ($L = 192$), 也无论是在信噪比低时或是在信噪比高时, 采用概率代数联合解码算法的 Turbo 码比特误码率(BER)总

是要比采用经典解码算法时低. 也就是说, 采用概率代数联合解码算法能在经典解码算法的基础上进一步提高 Turbo 码的纠错性能.

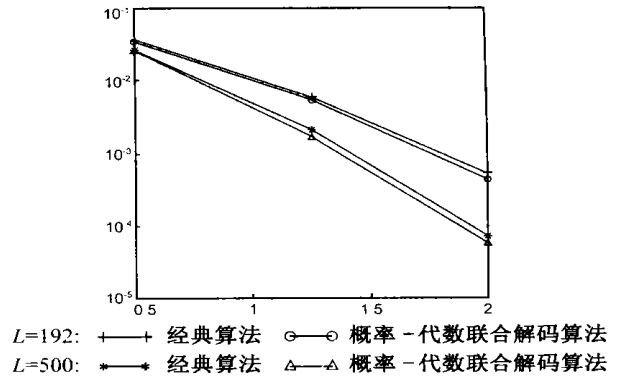


图 3 概率代数联合解码算法与经典算法结果比较

4 结论

Turbo 码概率代数联合解码算法在 Turbo 码迭代解码算法的基础上充分利用了 Turbo 码编码器的结构信息, 且在代数解码时采取了对复杂错误样本维持原迭代解码输出的准则, 避免了系统在出现复杂错误样本时产生的错误传播, 因此, Turbo 码概率代数联合解码算法的纠错性能要优于经典的 Turbo 码迭代解码算法. 由于代数解码对于低误差序列有更好的纠错能力, 从图 3 中可以看出, 在交织器长度或信道中信噪比增加时(对应于比特误码率(BER)曲线则呈现下降的趋势), 代数解码的效果就越明显. 在图 3 中, 取交织器长度 $L = 500$, 当比特误码率(BER)处于 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 时, 采用概率代数联合解码算法比采用经典的迭代解码算法能获得大约 0.1dB 的编码增益. 这使得 Turbo 码概率代数联合解码算法在传输重要信息时, 也就是对传输信息的误码率要求非常低时具有非常重要的实际意义.

参考文献:

- [1] C Berrou, A Glavieux, P Thitimajshima. Near Shannon limit error correcting coding and decoding: turbo codes [A]. In Proc ICC, 93[C]. Geneva, Switzerland: ICC, 1993. 1064-1070.
- [2] C Berrou, A Glavieux. Near optimum error correcting coding and decoding: Turbo codes [J]. IEEE Trans. Commun, 1996, 44(10): 1261-1271.
- [3] P H Siegel, D Divsalar, E Eleftheriou, etc. The turbo principle: from theory to practice [J]. IEEE J Select Areas Commun, 2001, 19(5): 793-798.
- [4] J Hagenauer. Source controlled channel decoding [J]. IEEE Trans Commun, 1995, 43: 2449-2457.
- [5] J Garcia-Frias, J DVillasenor. Combining hidden Markov source models and parallel concatenated codes [J]. IEEE Commun Lett, 1997, 1(7): 111-113.
- [6] N Gortz. On the iterative approximation of optimal joint source-channel decoding [J]. IEEE J Select Areas Commun, 2001, 19(9): 1662-1670.

- [7] P H Siegel, D Divsalar, E Eleftheriou, etc. The turbo principle: from theory to practice II[J]. IEEE J Select Areas Commun, 2001, 19(9): 1657- 1660.
- [8] G Battail. A conceptual framework for understanding turbo codes[J]. IEEE J Select Areas Commun, 1998, 16(2): 245- 254.
- [9] S Benedetto, G Montorsi. Unveiling Turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42(2): 409- 428.
- [10] L R Bahl, J Cocke, F Jelinek, J Raviv. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, (3): 284- 287.
- [11] S Benedetto, G Montorsi. Design of parallel concatenated convolutional codes[J]. IEEE Trans Commun, 1996, 44(5): 591- 560.
- [12] J Hagenauer, E Offer, L Papke. Iterative decoding of binary block and convolutional codes[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42(3): 429 - 445.
- [13] P Robertson. Illuminating the structure of decoders for parallel concatenated recursive systematic(turbo) codes[A]. In Proc, IEEE Globecom conf[C]. San Francisco: CA Dec, 1994.
- [14] J Hagenauer. The turbo principle: Tutorial introduction and state of the art[A]. in Proc, Int Symp On turbo codes and related topics[C]. Brest, France: ISOF CRT, 1997.
- [15] A S Barbulescu, S S Pietronbon. Terminating the trellis of turbo codes in the same state[J]. Electronics Letters 5th, 1995, 31(1): 22- 23.
- [16] W J Blackert, E K Hall, S G Wilson. Turbo code termination and interleaver conditions[J]. Electronics Letter 23rd, 1995, 31(24): 2082- 2083.
- [17] S Benedetto, G Montorsi. Role of recursive convolutional codes in turbo codes[J]. Electronics Letters, 1995, 31: 858- 859.

作者简介:



李建平 男, 湖南省武岗市人, 北京大学信息科学技术学院博士后, 其专业研究领域为通信与信息系统, 目前研究兴趣主要在 Turbo 码和空时码等方面。



梁庆林 男, 1941 年 2 月生于河北省青龙县, 北京大学电子工程研究所所长、教授、博导, IEEE 会员, 中国电子学会高级会员, 其目前的研究兴趣主要是扩频技术和数字通信技术。